S^2 上 Lefschetz fibration を用いたエキゾチック構造を持つ多様体のハンドル分解への応用

岡山大学大学院　環境生命自然科学研究科　環境生命自然科学専攻
藪口　怜央 (Reo YABUGUCHI) *

概要

ある多様体に同相だが微分同相でない多様体をエキゾチックな多様体というが、$m\mathbb{CP}^2\#n\overline{\mathbb{CP}^2}$ にエキゾチックな多様体の存在問題は多くの研究がある。さらにそれらのハンドル分解がどのようなものか、特に 1-,3-ハンドルの存在性を調べる研究が存在している。この問題については $k = 6, 7, 8, 9$ に対するエキゾチック $\mathbb{CP}^2\#k\overline{\mathbb{CP}^2}$ や $E(n)_{p,q}$ についての結果が知られている。$E(n)_{p,q}$ の組 (p, q) については有限個の例に留まっていたが、本研究では可算無限個の組 (p, q) について 1-,3-ハンドルのないハンドル分解を持つことを示した。

1　導入

多様体の全体集合の分類は位相幾何学の中心的な問題の一つである。3 次元以下の多様体については多様体の同相による分類と微分同相による分類が一致することが知られているが、4 次元以上ではその差がある。5 次元以上の多様体については「手術理論」の発展により原理的にはホモトピー論的問題に帰着されることが知られているが、$3, 4$ 次元多様体についてはこの原理が適用できない。

特に、Freedman の定理により単連結 C^∞ 級 4 次元多様体の同相による分類は完了しているが、微分同相による分類は現在も完了していない。微分同相による分類が難しい原因に、与えられた 4 次元多様体に同相だが微分同相でない多様体（これをエキゾチックな多様体という）が無限個存在することがある。例えば、基本的な C^∞ 級 4 次元多様体である複素射影平面 $\mathbb{CP}^2$、複素射影平面とその逆向きの多様体の連結和 $\mathbb{CP}^2\#\overline{\mathbb{CP}^2}$ ですらエキゾチックな多様体の有無は未解決である。

さて、任意のコンパクト C^∞ 級 4 次元多様体 Y は、4 次元球体 D^4 に微分同相な k-ハンドルと呼ばれる多様体によって分解される $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$。「コンパクトで連結な多様体は 0-ハンドルが 1 つだけのハンドル分解を持つ」という定理 ([GS]) から、連結性の仮定を加えた Y は、1 つの 0-ハンドルに $1, 2, 3, 4$-ハンドルを順に接着した多様体に微分同相である。0-ハンドルに $1, 2$-ハンドルを接着した多様体を Y_2 としたとき、Y が閉多様体なら Y_2 によって Y の微分同相類が完全に決定されるなどの事実がある。また、$\partial Y = \emptyset$ でなくとも、境界が連結で Y が単連結ならば Y の微分同相類は Y_2 と 3-ハンドルの個数で決定される。そのような事実から、特別な多様体を扱わない限りハンドル分解における重要な情報は、$1, 2$-ハンドルがその多くを占めていることが分かっている。多様体 X

* E-mail:reo0713@s.okayama-u.ac.jp

の基本群 $\pi_1(X)$ が自明となるとき単連結、X が 1-ハンドルのないハンドル分解を持つとき幾何学的単連結、X が 1-,3-ハンドルのないハンドル分解を持つとき完全モース関数を許容するという。1-ハンドルは基本群の生成元に対応するため、明らかに 1-ハンドルを持たないハンドル分解を許容する多様体は単連結であるが、その逆の命題「任意の単連結 4 次元閉多様体は 1-ハンドルのないハンドル分解を持つか?（あるいは、1-,3-ハンドルのないハンドル分解を持つか?)」は未解決である ([Ki97] の問題 4.18)。もう少し言及すると（*cf.* [Po])、3 次元以下及び 5 次元以上では単連結と幾何学的単連結は同値であるが、4 次元では反例（Casson の仕事により Po-Mazur manifolds が反例となっていること）が知られている。Kirby の問題がこれを背景を持つかは筆者は把握していないが、4 次元において単連結と幾何学的単連結が同値になるための条件の候補として閉を課しているという翻訳もできる。特に、楕円曲面 $E(n)_{p,q}$ や $\mathbb{CP}^2\#m\overline{\mathbb{CP}^2}$ にエキゾチックな多様体 (m 回の連結和を $\#m$ と書く。$m \geq 0$) に対してこの問題は集中的に取り組まれてきた（ここで、n,p,q は $n \geq 1, p,q \geq 2$ で $gcd(p,q) = 1$ の正の整数)。例えば、Harer, Kas, Kirby は「$E(1)_{2,3}$ の任意のハンドル分解は $1,3$-ハンドルをもつだろう」と予想している (Harer-Kas-Kirby 予想,[HKK86])。また、Gompf は「『$E(n)_{p,q}$ は $1,3$-ハンドルのないハンドル分解を持たないだろう』というのは良い予想である」と述べている ([G91])。

Harer-Kas-Kirby 予想は Akbulut([A09]) と安井弘一氏 ([Ya08J]) により、独立に反例が与えられている。特に、Akbulut は $E(1)$ にエキゾチックな無限族を構成しそのうちの一つが $E(1)_{2,3}$ になっており 1-,3-ハンドルがないことを示している。また、安井氏は $n \geq 1$ で $(p,q) = (2,3),(2,5),(3,4),(4,5)$ の場合に、$E(n)_{p,q}$ の 1-ハンドルのないハンドル分解を持つことを示した ([Ya08J])。安井氏は「$(p,q) = (2,3),(2,5),(3,4),(4,5)$ 以外の場合も構成できるだろう」とコメントしているが任意の (p,q) については未解決のままである。他の関連する仕事に、坂本氏の修士論文に $E(1)_{2,7}$ が 1-ハンドルのないハンドル分解を持つという結果がある ([Sa23])。最近のプレプリントで新たな進展があり、楠田大祐氏の結果と丹下基生氏の結果を紹介したい。楠田氏 [Ku24] は「$E(n)_{p,q}$ が 1-ハン祐ドルのないハンドル分解を持つか」という問題の組 $(n,p,q) = (n \geq 4,5,6),(n \geq 5,6,7),(n \geq 9,7,8),(n \geq 24,8,9)$ についての結果を、丹下氏 [T25] は「結び目 K の橋数が $9n$ 以下のとき、$E(n)_K$ が 1-ハンドルのないハンドル分解を持つ」、「$min\{p,q\}$ が 9 以下の時、$E(1)_{p,q}$ が 1-ハンドルのないハンドル分解を持つ」、「$min\{p,q\}$ が 4 以下の時、$E(n)_{p,q}$ が 1-ハンドルのないハンドル分解を持つ」という結果を得ている。ここで $E(n)_K$ とは楕円曲面 $E(n)$ に K に沿った結び目手術を施して得られる多様体である。Fintushel-Stern([FS98]) により導入された結び目 K に沿った結び目手術という操作は 4 次元閉多様体 X の改変操作であり豊富なエキゾチック多様体 X_K を生み出すことが知られている。

以上の先行研究では、主にハンドルスライド、有理ブローダウン、upside-down などの手法の組み合わせが主であった。岡森健一郎氏の修士論文ではエキゾチック $E(1)$ であって Lefschetz fibration から自然に生まれる Kirby 図式の特性を利用して 1-ハンドルを持たないようなハンドル分解を与えた。本研究は岡森氏の手法を応用したものであり、S^2 上 Lefschetz fibration の構造を用いて 1-,3-ハンドルに関する結果を得た。

Akhmedov-Park([AP08, AP10]) をはじめ、様々なエキゾチック $\mathbb{CP}^2\#m\overline{\mathbb{CP}^2}(2 \leq m \leq 9)$ の例が構成されてきたが ([FS06, P97, P05, PSS05, SS05] など)、安井氏 ([Ya10]) はエキゾチック

$\mathbb{CP}^2\#m\overline{\mathbb{CP}^2}$ のハンドル分解で $m=7,8,9$ のとき $1,3$-ハンドルのない例、$m=6,7,8,9$ のとき 1-ハンドルのない例をそれぞれ与えた。ただし、$m\leq 5$ の場合そのような例は知られていない。

2 諸定義

2.1 Lefschetz fibration

以下で Lefschetz fibration の定義とモノドロミー因数分解及びカービー図式の関係について紹介する。

Definition 2.1. [GS](Lefschetz fibration)
M^4 をコンパクト向き付け可能 $C^\infty 4$ 次元多様体、B^2 をコンパクト向き付け可能 $C^\infty 2$ 次元多様体、$f\colon M^4\to B^2$ を全射 C^∞ 写像とするとき、f が B^2 上の種数 g の Lefschetz fibration であるとは次の条件を満たすことである。

1. $\partial M^4 = f^{-1}(\partial B^2)$
2. $b_1,b_2,\ldots,b_n(\in Int(B^2))$ を f の臨界値 (ただし、n は有限) とし、f の臨界点 $p_i(\in f^{-1}(b_i))$ が条件 (a),(b) を満たして一意存在する ($i=1,2,\ldots,n$)。
   (a) $f|_{f^{-1}(B^2-\{b_1,b_2,\ldots,b_n\})}$ が種数 g の閉曲面 Σ_g に微分同相なものをファイバーにもつファイバー束である。
   (b) $w=f(z_1,z_2)=z_1z_2$ を満たす p_i と b_i の周りの向きを保つ複素局所座標が存在する。
3. M^4 に埋め込まれた自己交差数 (-1) の球面をどの $f^{-1}(b_i)$ も含まない。

$b_0\in Int(B^2)-\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ に対して $f^{-1}(b_0)$ を正則ファイバー、$f^{-1}(b_i)$ を特異ファイバーという。
この特異ファイバーは、閉曲面 Σ_g に微分同相な正則ファイバー上の単純閉曲線が 1 点に潰すことで得られ、この潰れる単純閉曲線のことを消滅サイクルという。

2.2 写像類群

Definition 2.2. 集合 $\mathrm{Diff}_+(\Sigma_g) = \{\varphi\colon \Sigma_g \to \Sigma_g \mid \varphi$ は向きを保つ微分同相写像 $\}$ は、写像の合成を積として群となる。φ_0 と φ_1 が isotopic であるとは、連続写像 $\Phi\colon \Sigma_g \times [0,1] \to \Sigma_g$ が存在して $\varphi_t := \Phi(\cdot, t)\colon \Sigma_g \to \Sigma_g$ が $\mathrm{Diff}_+(\Sigma_g)$ の元となる時である。また、記号で $\varphi_0 \sim \varphi_1$ と書く。この時、$\sim$ は同値関係である。

Definition 2.3. 種数 g の閉曲面 Σ_g の写像類群 Γ_g とは $\Gamma_g = \mathrm{Diff}_+(\Sigma_g)/\sim$ である。
$[f], [g] \in \Gamma_g$ に対して、$[f]\cdot[g] = [f \circ g]$ を積として Γ_g は群となる。

Definition 2.4. Figure1 の写像の isotopy 類は種数 g の閉曲面 Σ_g の写像類群 Γ_g の元であり、τ_c と書き Σ_g 上の単純閉曲線 c に沿ったデーンツイストという。

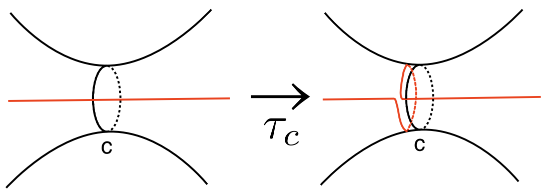

Figure1: 単純閉曲線 c についてのデーンツイスト

Definition 2.5. 全射 C^∞ 写像 $f\colon M^4 \to S^2$ を m 個の特異ファイバーを持つ S^2 上の種数 g の Lefschetz fibration とする。この Lefschetz fibration に対して定まる $id \in \Gamma_g$ の因数分解 $\tau_{c_1}\tau_{c_2}\ldots\tau_{c_m} = id$ をモノドロミー因数分解という。

Fact 2.6. モノドロミー因数分解は Σ_2 上の単純閉曲線に沿ったデーンツイストの積で与えられる。モノドロミー因数分解に現れる単純閉曲線が Lefschetz fibration の特異ファイバーを特徴づけており、Lefschetz fibration の全空間のカービー図式を書くことができる。特に、デーンツイストの積の個数が特異ファイバーの本数に一致している。

3 主定理

種数 h のファイバー 2 橋結び目 K の conway 表示は

$$K = C(2\epsilon_1, 2\epsilon_2, \cdots, 2\epsilon_{2h},)$$

(ただし、$\epsilon_i \in \{+1, -1\}$) であることが知られている。本研究の主定理は次である。

Theorem. 種数 h のファイバー 2 橋結び目 K が $C(2, 2, \cdots, 2)$ で表現されるとき、任意の正整数 n, h に対して $E(n)_K$ は 1-,3-ハンドルのないハンドル分解を持つ。

この主定理から次の系を得る。

Corollary. 2 に互いに素な任意の正整数 q に対して、$E(1)_{2,q}$ は 1-,3-ハンドルのないハンドル分解を持つ。

Proof. $T_{p,q}$ を (p, q) トーラス結び目とする。このとき、$E(1)_{p,q}$ は $E(1)_{T_{p,q}}$ に微分同相であることが知られており、$(2, q)$ トーラス結び目はファイバー 2 橋結び目で $C(2, 2, \cdots, 2)$ で表現される。よって、主定理から直ちに従う。

任意の自明でない結び目 K に対して、Seiberg-Witten 不変量が異なることから $E(n)_K$ は $E(n)$ にエキゾチックであることを注意しておく。

参考文献

[A09] S. Akbulut, *An infinite family of exotic Dolgachev surfaces without 1- and 3- handles*, J. Gökova Geom. Topol. **3** (2009) 22–43.

[A12] S. Akbulut, *The Dolgachev Surface, Disproving the Harer-Kas-Kirby conjecture*, Comment. Math. Helv. **87** (2012), no.1, 187–241.

[AP08] A. Akhmedov and B. D. Park, *Exotic Smooth Structures on Small 4-Manifolds*, Invent. Math. **173** (2008), 209–223.

[AP10] A. Akhmedov and B. D. Park, *Exotic smooth structures on small 4-manifolds with odd signatures*, Invent. Math.**181** (2010), no.3, 577–603.

[B24] R. I. Baykur, *On four-manifolds without 1- and 3-handles*, arXiv:2403.14586.

[BZ67] G. Burde, H. Zieschang, and González-Acũna, *Neuwirthsche knoten und Flächenabbildungen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **31** (1967), 239–246.

[D87] S. K. Donaldson, *Irrationality and the h-cobordism conjecture*, J. Differential Geom. **26** (1987), no. 1, 141–168.

[FS98] R. Fintushel, and R. Stern, *Knots, links, and 4-manifolds*, Invent. Math. **134** (1998), 363–400.

[FS06] R.Fintushel and R. J. Stern, *Double node neighborhoods and families of simply connected 4-manifolds with $b^+ = 1$*, J. Amer. Math. Soc. **19** (2006), no. 1, 171–180.

[G91] R. E. Gompf, *Nuclei of elliptic surfaces*, Topology 30 (1991), no. 3, 479–511.

[GS] R. E. Gompf, A. I. Stipsitz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Graduate Studies in Mathematics, **20** American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[Gon70] F. González-Acũna, *Dehn's construction on knots*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, **15** (1970), 58–77.

[HKK86] J. Harer, A. Kas, R. Kirby, *Handlebody decompositions of complex surfaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **62** (1986).

[Ki97] R. Kirby, *Problems in low-dimensional topology*, Geometric topology, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics **2.2** (ed. W. Kazez; American Mathematical Society, Providence, RI, 1997) 35–473.

[Ko89] D. Kotschick, *On manifolds homeomorphic to* $\mathbb{CP}^2\#8\overline{\mathbb{CP}^2}$, Invent. Math. **95** (1989), no. 3, 591–600.

[Ku24] D. Kusuda, *On elliptic surfaces which have no 1-handles*, arXiv:2410.16900.

[O11] K. Okamori, *A construction of an exotic* $\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2}$ *admitting a Lefschetz fibration structure*, Master Thesis, (in Japanese), Osaka University, (2011).

[P97] J. Park, *Seiberg-Witten invariants of generalized rational blow-downs*, Bull. Austral. Math. Soc. **56** (1997), no. 3, 363–384.

[P04] J. Park, *Non-complex symplectic 4-manifolds with* $b_2^+ = 1$, Bull. London Math. Soc. **36** (2004), 231–240.

[P05] J. Park, *Simply connected symplectic 4-manifolds with* $b_2^+ = 1$ *and* $c_1^2 = 2$, Invent. Math. **159** (2005), 657–667.

[PSS05] J. Park, A. I. Stipsicz, Z. Szabó, *Exotic smooth structures on* $\mathbb{CP}^2\#5\overline{\mathbb{CP}^2}$, Math. Res. Lett. **12** (2005), no. 5-6, 701–712.

[Po] V. Poenaru, *The Problems of Dimension Four, and Some Ramifications*, MDPI mathematics, **11** (2023), 3826.

[Sa23] R. Sakamoto, *A geometrically simply connected elliptic surface*, Master thesis, Osaka University (2023).

[SS05] A. I. Stipsicz and Z. Szabó, *An exotic smooth structure on* $\mathbb{CP}^2\#6\overline{\mathbb{CP}^2}$, Geom. Topol. **9** (2005), 813–832.

[T25] M. Tange, *Exotic elliptic surfaces without 1-handles*, arXiv:2501.03935v4.

[Ya08M] K. Yasui, *Exotic rational elliptic surfaces without 1-handles*, Algebr. Geom. Topol. **8** (2008), no. 2, 971–996.

[Ya08J] K. Yasui, *Elliptic surfaces without 1-handles*, J. Topol. **1** (2008), no. 4, 857–878.

[Ya10] K. Yasui, *Small exotic rational surfaces without 1- and 3-handles*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), no. 11, 5893–5907.

[Yu08] K. -H. Yun, *Twisted Fiber Sums of Fintushel-Stern's Knot Surgery 4-Manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **360**, no.11 (2008), 5853–5868.